
Programme de khôlle de maths n° 28

Semaine du 15 juin

Cours

• Chapitre 16 : Intégration

- Intégrale sur un intervalle fermé d'une fonction positive, d'une fonction de signe quelconque, aire algébrique
- Propriétés des intégrales : relation de Chasles, l'intégrale d'une fonction positive est positive, linéarité de l'intégrale, $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$, inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne, $f \geq 0$ et $\int f = 0 \Rightarrow f = 0$
- Théorème fondamental : $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f
- Définition d'une primitive, primitives usuelles.
- $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ si F est une primitive quelconque de f
- Intégration par partie
- Changement de variable : soit f une fonction continue sur un intervalle I et φ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ avec $\varphi([a, b]) \subset I$, alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du$$

- Fonctions paires et fonctions impaires
- Sommes de Riemann : si f est continue sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Si f est continue sur $[0, 1]$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$$

Questions de cours

• Questions de cours

- Démonstration de la formule de changement de variable : si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ est $\mathcal{C}^1$, alors $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$
- Démonstration de : $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$ pour une fonction f impaire et $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$ pour une fonction f paire.
- Formule et démonstration de la propriété d'intégration par partie
- Tableau de primitives usuelles à connaître par coeur.